

Písemka - 14. cvičení (10. ledna 2007)

1. příklad (5 bodů)

Rozlož matici $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 1 & 4 & 7 & 2 & 6 & 8 & 3 \end{pmatrix}$ na součin disjunktních cyklů a urči její řád a znaménko.

2. příklad (5 bodů)

Buď G grupa, $a, b, c \in G$. Najdi všechna $x \in G$ taková, že $c(ab^{-1}x)^{-1}a^2 = a$.

3. příklad (5 bodů)

Buď G komutativní grupa, $a, b \in G$, $o(a), o(b) < \infty$, $\text{NSD}(o(a), o(b))=1$. Dokaž, že $o(ab) = o(a)o(b)$ ($o(x)$ značí řád prvku x).

4. příklad (10 bodů)

a) Definuj (grupový) homomorfismus, jeho jádro a obraz.

b) Buď $G = \mathbb{Z}_4(+) = \{0, 1, 2, 3\}$.

c) Buď $G = \mathbb{Z}_5(+) = \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

Uvažujme $\varphi : G \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}(\cdot)$, $\varphi(a) = i^a$. Je to (v závislosti na G) homomorfismus? Pokud ano, urči jeho jádro a obraz.

5. příklad (5 bodů)

Najdi všechny 8-prvkové podgrupy grupy $\mathbb{Z}_{30}(+)$.

6. příklad (7 bodů)

Máme 4 červené, 3 oranžové a 4 žluté korálky. Všechny korálky navlékneme na provázek a svážeme do náhrdelníku. Kolik různých náhrdelníků takto může vzniknout (poloha uzlíku nás nezajímá; dva náhrdelníky jsou stejné, pokud je jde na sebe převést otáčením nebo překlápěním)?

7. příklad (7 bodů)

Buď G grupa velikosti p^k . Dokaž, že obsahuje prvek řádu p .

K úspěšnému napsání písemky je potřeba získat aspoň 25 bodů.